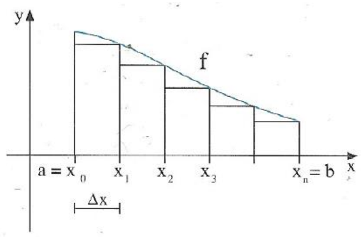
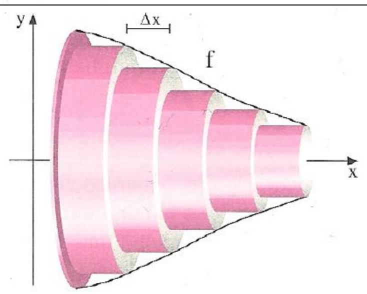
Volumen von Rotationskörper

Bisher könne wir Flächen zwischen einer Funktion und der x-Achse mit folgender Formel berechnen: $\int_a^b f(x)\,dx$



Lässt man nun die Funktion um die x-Achse kreisen, dann entsteht aus der Funktion ein Körper und aus der Fläche ein Volumen. Möchte man das Volumen nun berechnen, arbeitet man nicht mehr über Rechtecke, sondern über Kreisscheiben. Das Volumen einer Scheibe beträgt: $V = \Pi \cdot f^2(x) \cdot \Delta x$

Ähnlich wie bei der Annäherung an die Fläche, addieren wir nun die Summe der Kreisscheiben: $\sum \Pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x$ Lässt man nun die Anzahl der Scheiben gegen unendlich laufen, nähert sich die Summe an das Volumen des Rotationskörpers an und wir erhalten folgende Formel:



$$V = \Pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

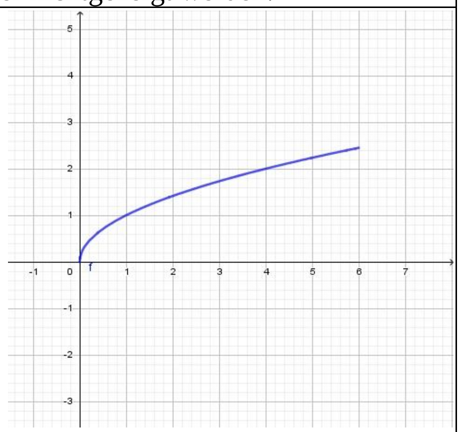
Mathematisch korrekt ausgedrückt: Die Rotationsformel

f sei eine über dem Intervall [a;b] stetige und nicht negative Funktion. Rotiert der Graph von f über dem Intervall [a;b] um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit dem Volumen:

$$V = \Pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Anmerkung: Auch eine Rotation um die y-Achse lässt sich berechnen, soll hier aber nichtgezeigt werden.

Beispiel:



Die nebenstehende Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ beschreibt durch Rotation um die x-Achse die Form eines Sektglases.

a) Zeichne den Rotationskörper

b) Berechne das Volumen im Intervall I = [0; 6]

c) Wie lang müsste das Sektglas sein, damit genau 0,1 l in das Glas passen?